Ejercicio 1

Dada la ecuación $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$

a) Demostrar que tiene una solución s en el intervalo $[-2, 0]$

b) A partir del intervalo anterior, usando el método de la bisección, hallar un nuevo intervalo de longitud 0.5 que contenga la raíz s.

c) Partiendo de x0=-1.5, realizar una iteración del método de Newton.

d) Demostrar que Newton converge para cualquier punto del intervalo $[-2, -1.5]$ y hallar cuántas iteraciones son necesarias para asegurar un error menor que 10^{-8} si empezamos en x0=-1.5.

Solución

Considerando $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ que es continua (es un polinomio) y se verifica $f(-2) = -2 < 0 \qquad f(0) = 4 > 0$ por el teorema de Bolzano, tiene al menos una raíz entre -2 y 0

El punto medio entre -2 y 0 es -1 y $f(-1) = 2 > 0$ luego tenemos al menos una raíz entre -2 y -1

El punto medio entre -2 y -1 es -1.5 y $f(-1.5) = 0.625 > 0$ luego tenemos al menos una raíz entre -2 y -1.5 que tiene longitud 0.5

El método de Newton es $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$

Como $f'(x) = 3x^2 + 4x + 3$ entonces $x_1 = 1.6667$

A partir de ahora, se considera siempre $x \in [-2, -1.5]$

Teniendo en cuenta que $f''(x) = 6x + 4$, se tiene

$6(-2) + 4 \leq 6x + 4 \leq 6(-1.5) + 4 < 0$

Entonces, $f''(x)$ es negativa en ese intervalo por lo que

$$|f''(x)| = -f''(x) \leq -f(-2) = 8$$

Por ser $f''(x)$ negativa en ese intervalo (implica que $f'(x)$ es decreciente en ese intervalo)

$$7 = f'(-2) \geq f'(x) \geq f'(-1.5) = 3.75$$

Por lo que

$$C = \frac{max\{|f''(x)|, , x \in [-2, -1.5]\}}{2min\{|f''(x)|, , x \in [-2, -1.5]\}} = 8/7.5$$

Puesto que $x_0, s \in [-2, -1.5]$ entonces $|x_0 - s| \leq 0.5$ con lo que $|Ce_0| < 1$ y converge para cualquier $x_0 \in [-2, -1.5]$

Partiendo ahora de $x_0 = -1.5$ entonces $|e_n| \leq \dfrac{|Ce_0|^{2^n}}{C}$

$$|e_n| \leq \frac{|Ce_0|^{2^n}}{C} < 10^{-8}$$

$$log(|Ce_0|^{2^n}) < log(C10^{-8})$$

$$2^n log(|Ce_0|) < log(C10^{-8})$$

Como $log(|Ce_0|) < 0$ ya que $|Ce_0| < 1$

$$2^n > \frac{log(C10^{-8})}{log(|Ce_0|)}$$

$$n > \frac{log(\frac{log(C10^{-8})}{log(|Ce_0|)})}{log(2)} = 4.8680$$

luego $n = 5$

Ejercicio 2:

Sea el sistema A·x=b con A= $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 17 \end{pmatrix}$ cuya solución exacta es $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Al resolver numéricamente se obtiene la solución x1=0.71, x2=1.41. Calculad el residuo o variación del término independiente ($\bar{r} = \bar{b} - A \cdot \bar{x}$) de dicha solución y su norma infinito.

$$\bar{r} = \bar{b} - A \cdot \bar{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.71 \\ 1.41 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.02 \\ 0.03 \end{pmatrix}, \qquad \|\bar{r}\| = \left\| \begin{pmatrix} -0.02 \\ 0.03 \end{pmatrix} \right\| = 0.03$$

A partir de esta información estimad el condicionamiento de la matriz A, justificando vuestro resultado.

Sabemos que: $\dfrac{\|\delta\bar{x}\|}{\|\bar{x}\|} \le c(A) \cdot \dfrac{\|\bar{r}\|}{\|\bar{b}\|}$. Usando la norma infinita (la más sencilla de calcular) tenemos que $\|\bar{x}\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = 1$, $\|\delta\bar{x}\| = \left\| \begin{pmatrix} -0.29 \\ 0.41 \end{pmatrix} \right\| = 0.41$, $\|\bar{b}\| = \left\| \begin{pmatrix} 12 \\ 17 \end{pmatrix} \right\| = 17$ y $\|\bar{r}\| = \left\| \begin{pmatrix} 0.02 \\ 0.03 \end{pmatrix} \right\| = 0.03$

Por lo tanto $\dfrac{0.41}{1} \le c(A) \cdot \dfrac{0.03}{17}$ y una cota inferior para c(A) es $c(A) \ge \dfrac{0.41 \cdot 17}{0.03} \sim 232$

¿Tendría sentido intentar resolver este sistema trabajando únicamente con 2 cifras significativas de precisión? No. Al ser cond(A) >= 232, sabemos que se pueden llegar a perder más de 2 cifras al resolver el sistema. Si partimos de 2 cifras de precisión, la solución obtenida posiblemente no tenga ninguna cifra correcta.

b) Resolver el sistema A·x=b usando eliminación de Gauss **sin pivotar**, **simulando una máquina que use una representación con 3 cifras significativas**, de forma que el resultado de CADA operación individual se redondee a 3 cifras (no 3 decimales).

Cociente m=A21/A11 = 10/7 = 1.4286... = 1.43 (3 cifras)
m· Fila1 = (10.01 7.15 17.16) --> (10 7.15 17.2)
Fila2-m·Fila1 = (10 7 17) - (10 7.15 17.2) = (0 -0.15 -0.2)

Sistema Ux=c equivalente $\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 5 & 12 \\ 0 & -0.15 & -0.2 \end{array}\right)$ --> $\begin{array}{l} 7x_1 + 5x_2 = 12 \\ -0.15x_2 = -0.2 \end{array}$

Resolviendo el sistema triangular: x2= -0.2/-0.15 = 1.333... = 1.33
x1= (12-6.65)/7 = 0.7643... = 0.764